Б. М. ДУБРОВ, Д. И. ПИРШТУК

КЛАССИФИКАЦИЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ВЕКТОРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

Рассмотрено применение техники алгебр Ли для классификации и стандартного координатного представления нильпотентных аппроксимаций векторных распределений в сингулярных точках. Дается краткое общее понятие о нильпотентной аппроксимации векторных распределений, описаны методы исследования нильпотентных аппроксимаций сингулярных векторных распределений. Предложен классификационный алгоритм, показано применение данной техники к описанию всех нильпотентных аппроксимаций на двумерных многообразиях. Изложение материала сопровождается конкретными примерами.

Ключевые слова: классификация; нильпотентные аппроксимации; полиномиальные векторные поля; векторные поля на многообразиях; алгебры Ли.

This article is devoted the application of technology for the classification of Lie algebras and the standard coordinate representation nilpotent approximations of vector distributions in singular points. We provide a brief general concept of nilpotent approximation of vector distributions, describe the methods of research nilpotent approximations of singular vector distributions. In this article it is proposed classification algorithm, demonstrated the use of this technique to the description of all nilpotent approximations on two-dimensional manifolds. Presentation of the material is accompanied by concrete examples.

Key words: classification; nilpotent approximations; polynomial vector fields; vector fields on manifolds; Lie algebras.

Понятие нильпотентной аппроксимации

Нильпотентные аппроксимации векторных распределений и систем векторных полей являются важной техникой исследования свойств неголономных задач оптимального управления и классической механики [1]. В регулярном случае нильпотентная аппроксимация описывается нильпотентной градуированной алгеброй Ли и известна в дифференциальной геометрии как символ Танаки неголономного векторного распределения [2].

В отличие от регулярного случая в сингулярной точке нильпотентная аппроксимация может быть описана как пара $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, где $\mathfrak{m}$ – градуированная нильпотентная алгебра Ли, а $\mathfrak{n}$ – ее эффективная подалгебра (т. е. подалгебра, не содержащая собственных идеалов алгебры Ли $\mathfrak{m}$). Такие пары алгебр Ли хорошо известны в алгебраической модели транзитивной дифференциальной геометрии [3]. В данной статье показано, как техника алгебр Ли может быть эффективно использована для классификации нильпотентных аппроксимаций сингулярных векторных распределений в малых размерностях.

Пусть M – гладкое многообразие размерности m.

Определение 1. Под *сингулярным векторным распределением* D на M будем понимать такое подмножество $D \subset TM$, что:

1) $D_x \subset T_x M$ – векторное подпространство для всех $x \in M$;

2) для каждой точки $x \in M$ существует такая ее открытая окрестность $U(x)$ и такой набор векторных полей $X_1, X_2, ..., X_r$ на $U(x)$, что для любой точки $y \in U(x)$ $D_y = \langle X_1(y), X_2(y), ..., X_r(y) \rangle$.

Рангом сингулярного распределения D называется число

$$\operatorname{rk}(D) = \max_{q \in M} \dim \langle X_1(q), ..., X_r(q) \rangle.$$

Точки $x \in M$, в которых $\dim \langle X_1(x), \ldots, X_r(x) \rangle < \operatorname{rk}(D)$, называются *сингулярными*.

Пример 1. С каждым сингулярным распределением, порожденным векторными полями $X_1, ..., X_r$, связана так называемая линейная задача оптимального управления $\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} u_i X_i$, где $u_1, ..., u_r$ являются управляющими параметрами. Обратно: задание линейной задачи оптимального управления равносильно заданию некоторого (сингулярного) векторного распределения.

Пример 2. Рассмотрим $M = \mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) и распределение $D = \left\langle X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = x^n \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$, $n \geq 1$. Заданное таким образом распределение является сингулярным при $x = 0$.

Данное распределение известно как *распределение Грушина* порядка n [4].

Пусть D – некоторое распределение на многообразии M. Тогда *(слабый) производный ряд* $D_{.}$ строится следующим образом:

1) $D_{-1} = D$;

2) $\underline{D}_{-(i+1)} = \underline{D}_{-i} + [\underline{D}, \underline{D}_{-i}]$, где под $\underline{D}$ понимается пространство сечений распределения D.

Распределение $D \subset TM$ называется *вполне неинтегрируемым*, если существует такое число $\mu > 0$, что μ-й член $D_{-\mu}$ слабого производного ряда совпадает с касательным расслоением TM. Например, для распределения Грушина мы имеем $D_{-n-1} = T\mathbb{R}^2$, тогда как $\dim D_{-k} = 1$ при $x = 0$ для всех $k = 1, ..., n$.

В настоящей статье исследуются так называемые нильпотентные аппроксимации сингулярных векторных распределений [1]. Следуя подходу Флисса [5, 6], определяем их через свободные алгебры Ли [7].

Пусть $D = \langle X_1, ..., X_r \rangle$ – *вполне неинтегрируемое* распределение на M. Рассмотрим свободную алгебру Ли F_r с образующими $x_1, ..., x_r$. Заметим, что она является градуированной алгеброй Ли. Мы будем для удобства считать ее $\mathbb{Z}_{<0}$-градуированной, полагая $\deg x_i = -1$, $i = 1, ..., r$. Рассмотрим канонический гомоморфизм алгебр Ли $\varphi : F_r \to \operatorname{Vect}(M)$, $x_i \mapsto X_i \in \underline{D} \subset \underline{TM}$. Этот гомоморфизм задает каноническое линейное отображение $\varphi_0 : F_r \to T_0 M$, $y \mapsto \varphi(y)(0)$. Несложно проверить, что $\ker \varphi_0$ – это подалгебра в F_r коразмерности r.

Построим ассоциированную с ней градуированную подалгебру $\operatorname{gr}(\ker \varphi_0)$ в алгебре Ли F_r. А именно, рассмотрим естественную возрастающую фильтрацию $0 \subset F^{-1}F_r \subset F^{-2}F_r \subset F^{-3}F_r \subset \ldots$ алгебры F_r, где $F^{-i}F_r$ состоит из элементов степени, большей или равной $-i$. Тогда по определению положим $\operatorname{gr}(\ker \varphi_0) = \sum_{i \geq 1} (F^{-i}F_r \cap \ker \varphi_0 + F^{-i+1}F_r) / F^{-i+1}F_r$.

Пусть теперь $\mathfrak{a}$ – наибольший идеал алгебры F_r, лежащий внутри $\operatorname{gr}(\ker \varphi_0)$.

Предложение 1. *Такой наибольший идеал* $\mathfrak{a}$ *существует и является градуированным.*

Доказательство. Легко видеть, что такой наибольший идеал существует. Для этого достаточно взять сумму идеалов в F_r, лежащих в $\operatorname{gr}(\ker \varphi_0)$. Пусть $\mathfrak{a}$ – полученный идеал. Покажем от противного, что он является градуированным. Пусть $y = \sum_i y_i \in \mathfrak{a} \subset \operatorname{gr}(\ker \varphi_0)$ – элемент из идеала $\mathfrak{a}$, который не является однородным, и пусть компонента y_i не лежит в идеале. Поскольку $\operatorname{gr}(\ker \varphi_0)$ – градуированная подалгебра, то $y_i \in \operatorname{gr}(\ker \varphi_0)$. Рассмотрим идеал $[y_i, F_r] = (y_i) \subset F_r$. Он не лежит в $\operatorname{gr}(\ker \varphi_0)$, так как $\mathfrak{a}$ –

наибольший. Пусть тогда $[y_i, b] \notin \mathrm{gr}(\ker\varphi_0)$ для некоторого элемента $b \in F_r$. Тогда $[y, b] \in \mathrm{gr}(\ker\varphi_0)$, $[y, b] = \sum_j [y_j, b] \in \mathrm{gr}(\ker\varphi_0)$, откуда из градуированности $\mathrm{gr}(\ker\varphi_0)$ получаем, что $[y_i, b] \in \mathrm{gr}(\ker\varphi_0)$. Получили противоречие. Следовательно, идеал $\mathfrak{a}$ является градуированным.

Определение 2. *Символом распределения* D в точке $0 \in M$ называется пара алгебр Ли $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \left(F_n / \mathfrak{a}, \mathrm{gr}(\ker\varphi_0)/\mathfrak{a}\right)$.

Нетрудно показать, что $\mathfrak{m} = F_n / \mathfrak{a}$ есть конечномерная градуированная нильпотентная алгебра Ли, порожденная элементами степени –1, а $\mathfrak{n} = \mathrm{gr}(\ker\varphi_0)/\mathfrak{a}$ – ее градуированная подалгебра, не содержащая собственных идеалов $\mathfrak{m}$. Мы будем называть такие подалгебры *эффективными*.

Пример 3. Найдем нильпотентную аппроксимацию распределения Грушина.

Ясно, что $\mathrm{gr}(\ker\varphi_0)$ содержит все элементы базиса Холла F_2 за исключением x_1 и $(\mathrm{ad}\, x_1)^n x_2$. (Здесь и далее, как обычно, $(\mathrm{ad}\, f)v = [f, v]$ и $(\mathrm{ad}\, f)^{i+1} v = \left[f, (\mathrm{ad}\, f)^i v\right]$.) Другими словами, $\mathrm{gr}(\ker\varphi_0)$ линейно порождена скобками, содержащими x_2 хотя бы дважды, и скобками $(\mathrm{ad}\, x_1)^k x_2$, $k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n\}$.

Понятно, что скобки $(\mathrm{ad}\, x_1)^k x_2$, $k > n$, вместе со скобками, содержащими x_2 хотя бы дважды, порождают идеал в F_r, лежащий в $\mathrm{gr}(\ker\varphi_0)$ (а именно $\mathrm{gr}(\ker\varphi)$), а значит, лежат в идеале $\mathfrak{a}$. С другой стороны, никакая линейная комбинация $(\mathrm{ad}\, x_1)^k x_2$, $k < n$, не может принадлежать идеалу $\mathfrak{a}$, так как применение с любой такой линейной комбинацией несколько раз скобки Ли с x_1 даст нам с точностью до коэффициента скобку $(\mathrm{ad}\, x_1)^n x_2$, не лежащую в $\mathrm{gr}(\ker\varphi_0)$. Значит, идеал $\mathrm{gr}(\ker\varphi)$ является максимальным.

Следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{m}$ имеет размерность $n + 2$ и мы можем зафиксировать в ней базис

$$e_k = (\mathrm{ad}\, x_1)^k x_2 \bmod \mathrm{gr}(\ker\varphi),\ k = \overline{0, n},\ \ f = x_1 \bmod \mathrm{gr}(\ker\varphi).$$

Тогда мы имеем, что $\left[e_i, e_j\right] = 0, i, j = \overline{0, n}$, $\left[f, e_i\right] = e_{i+1}$ для $i = \overline{0, n-1}$ и $\left[f, e_n\right] = 0$, а подалгебра $\mathfrak{n}$ порождается элементами $e_i, i = \overline{0, n-1}$.

Стандартное распределение с заданной нильпотентной аппроксимацией

Пусть $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ – пара, состоящая из нильпотентной градуированной алгебры Ли, порожденной $\mathfrak{m}_{-1}$, и ее эффективной градуированной подалгебры. Пусть G – связная и односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{m}$ и H – ее подгруппа, соответствующая подалгебре $\mathfrak{n}$. Рассмотрим однородное пространство $M = G/H$. На нем естественным образом определено инвариантное распределение D такое, что $D_{eH} = \mathfrak{m}_{-1}$. Будем называть такое распределение *стандартным распределением типа* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$.

В подходящей системе координат стандартное распределение может быть задано полиномиальными векторными полями $X_1, ..., X_r$, $r = \dim \mathfrak{m}_{-1}$, на $\mathbb{R}^m$, $m = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{n}$. При этом мы можем так задать степени координат $x_1, ..., x_m$ на $\mathbb{R}^m$, что:

1) векторные поля $X_1, ..., X_r$ имеют обобщенную степень –1 (мы полагаем, что $\deg \dfrac{\partial}{\partial x_i} = -\deg x_i$);

2) эти поля порождают конечномерную градуированную алгебру Ли векторных полей, изоморфную $\mathfrak{m}$;

3) подалгебра $\mathfrak{n}$ состоит в точности из всех векторных полей в $\mathfrak{m}$, равных нулю в точке 0.

Для построения такого координатного представления зафиксируем базис $\{e_1, ..., e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{m}$, состоящий из однородных элементов и такой, что $\{e_{m+1}, ..., e_n\}$ образует базис подалгебры $\mathfrak{n}$. Далее, отождествим G с $\mathfrak{m}$ и зададим умножение при помощи формулы Кэмпбелла – Хаусдорфа [7]:

$$u \cdot v = u + v + \frac{1}{2}[u, v] + \frac{1}{12}\big[u, [u, v]\big] + \frac{1}{12}\big[v, [v, u]\big] + \ldots .$$

Отождествляя в свою очередь $\mathfrak{m}$ с $\mathbb{R}^n$ при помощи выбранного базиса и учитывая, что базис состоит из градуированных элементов, мы получаем, что умножение в G задается в явном виде как $(x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = \left(F_1(x, y), ..., F_n(x, y)\right)$, где каждая из функций F_i, i =1, ..., n, является однородным полиномом относительно переменных x_j, y_j, j = 1, ..., n, обобщенной степени $-\deg e_i$, где мы полагаем $\deg x_j = \deg y_j = -\deg e_j$.

Далее, пусть U – градуированное подпространство в $\mathfrak{m}$, порожденное (как векторное пространство) элементами e_1, ..., e_m. Тогда очевидно, что мы имеем $\mathfrak{m} = U \oplus \mathfrak{n}$, и факторпространство $M = G/H$ может быть отождествлено с U. В этом случае $(x_1, ..., x_m)$ образуют требуемую систему координат на M.

Пример 4. Пусть $\mathfrak{m}$ – 4-мерная нильпотентная алгебра Ли с базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и ненулевыми коммутационными соотношениями вида $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$. Зададим градуировку на $\mathfrak{m}$, полагая $\deg e_1 = \deg e_2 = -1$, $\deg e_3 = -2$, $\deg e_4 = -3$. Очевидно, что $\mathfrak{n} = \langle e_3 \rangle$ является эффективной градуированной подалгеброй. Соответствующее стандартное распределение порождается следующими двумя векторными полями на $\mathbb{R}^3$: $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x^2 \frac{\partial}{\partial z}$.

Классификация нильпотентных аппроксимаций в малых размерностях

Очевидно, что любое вполне неголономное распределение на одномерном гладком многообразии регулярно и локально может быть задано одним векторным полем $\frac{\partial}{\partial x}$.

Распределения на двумерных многообразиях. Описание всех нильпотентных аппроксимаций на двумерных многообразиях сводится к описанию пар $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ коразмерности 2. Каждой такой паре соответствует конечномерная транзитивная алгебра Ли полиномиальных векторных полей на плоскости. Все такие алгебры Ли были описаны в конце XIX в. Софусом Ли [8, 9]. Используя эти результаты, мы немедленно получаем следующую теорему.

Теорема. *Нильпотентная аппроксимация сингулярного распределения на двумерном многообразии описывается распределением Грушина для некоторого* $n \geq 1$.

Классификационный алгоритм. Пусть $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ – символ сингулярного вполне неголономного распределения на многообразии M размерности m. Далее мы покажем, как описание всех таких пар может быть сведено к описанию расширений специального вида пар $(\tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{n}})$ коразмерности $m - 1$.

Рассмотрим естественное действие $\mathfrak{n}$ на $\mathfrak{m} / \mathfrak{n}$. Поскольку алгебра Ли $\mathfrak{n}$ нильпотентная, то по теореме Энгеля подпространство $U = \{u \in \mathfrak{m} / \mathfrak{n} \mid \mathfrak{n}.u = 0\}$ непустое. Пусть u – произвольный ненулевой однородный элемент в U минимальной степени. Тогда $\bar{\mathfrak{n}} = \mathbb{R}u + \mathfrak{n}$ – также (градуированная) подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{m}$. Пусть $\mathfrak{a}$ – наибольший идеал алгебры Ли $\mathfrak{m}$, лежащий в $\bar{\mathfrak{n}}$. Аналогично предложению 1 нетрудно показать, что он согласован с градуировкой в $\mathfrak{m}$. Тогда из результатов [10] немедленно вытекает следующее предложение.

Предложение 2.

1. *Идеал* $\mathfrak{a}$ *коммутативен.*
2. *Пересечение* $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}$ *имеет коразмерность 1 в* $\mathfrak{a}$ *и является идеалом в* $\mathfrak{n}$.
3. *Пара* $(\tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{n}}) = (\mathfrak{m} / \mathfrak{a}, \mathfrak{n} / \mathfrak{a}_0)$ *эффективна и имеет коразмерность* $m - 1$.

Таким образом, пара $(\tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{n}})$ *является нильпотентной аппроксимацией некоторого распределения на многообразии* $\tilde{M}$ *размерности* $m - 1$, *а пара* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *может быть получена как расширение пары* $(\tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{n}})$ *при помощи модуля* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_0)$.

В терминах координатного представления для стандартного распределения типа $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ этот результат переформулируется следующим образом. Пусть $\tilde{D} = \left\langle \tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_s \right\rangle$ – стандартное распределение на $\mathbb{R}^{m-1}$, соответствующее паре $(\tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{n}})$. Тогда стандартное распределение типа $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ в подходящей системе координат на $\mathbb{R}^m$ порождается полиномиальными векторными полями $X_1, ..., X_r$, $r \geq s$, такими, что:

1) поля X_i, $i = 1, ..., s$, переходят в поля $\tilde{X}_i$ при стандартной проекции $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$;

2) $\deg x_m = -\deg u$, где, как было определено ранее, u – однородный элемент подпространства $U = \{u \in \mathfrak{m} / \mathfrak{n} \mid \mathfrak{n}.u = 0\}$ минимальной степени;

3) поля X_j, $j = s + 1, ..., r$, лежат в ядре этой проекции и имеют вид $f\left(x_1, ..., x_{m-1}\right)\frac{\partial}{\partial x_m}$, где полиномы $f(x_1, ..., x_{m-1})$ однородны и имеют степень, равную $\deg x_m - 1$.

Пример 5. Предположим, что $\tilde{\mathfrak{m}} = \tilde{\mathfrak{m}}_{-1}$ – коммутативная алгебра Ли, $\tilde{\mathfrak{n}} = 0$. Тогда стандартное распределение типа $(\tilde{\mathfrak{m}}, \tilde{\mathfrak{n}})$ тривиально и порождено векторными полями $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., m - 1$. Таким образом, все соответствующие расширения $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ допускают координатное представление вида

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + g_i\left(x_1, ..., x_{m-1}\right)\frac{\partial}{\partial x_m}, \quad i = 1, ..., m-1; \quad X_j = f_j\left(x_1, ..., x_{m-1}\right)\frac{\partial}{\partial x_m}, \quad j = m, ..., r,$$

где $\deg x_i = 1$, $i = 1, ..., m - 1$; $\deg x_m = k$, $\deg g_i = \deg f_j = k - 1$ для некоторого $k \geq 1$.

Авторы выражают благодарность А. А. Аграчеву, И. Зеленко, П. Мормулу за обсуждение идей геометрической теории управления и за ценные замечания по алгебраическому подходу к определению символа неголономного распределения в сингулярной точке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Bellaiche A. The tangent space in sub-riemannian geometry // J. of Math. Sciences. 1994. Vol. 83, № 4. P. 461–476.

2. Tanaka N. On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups // J. Math. Kyoto. Univ. 1970. Vol. 10. P. 1–82.

3. Guillemin V. W., Sternberg S. An algebraic model of transitive differential geometry // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 70. P. 16–47.

4. Грушин В. В. Об одном классе гипоэллиптических операторов // Матем. сб. 1970. Т. 83 (125), № 3 (11). С. 456–473.
5. Fliess M. Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives // Bull. Soc. Math. France. 1981. Vol. 109. P. 3–40.
6. Kawski M., Sussmann H. Noncommutative power series and formal Lie-algebraic techniques in nonlinear control theory // Operators, Systems, and Linear Algebra. Leipzig, 1997. P. 111–128.
7. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли : пер. с фр. М., 1976.
8. Lie S. Theore der Transformationsgruppen : in 3 Bd. Leipzig, 1893. Bd. 3.
9. Olver P. Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge, 1995.
10. Дубров Б. М. Инвариантные одномерные распределения на однородных пространствах // Докл. НАН Беларуси. 1997. Т. 42, вып. 3. С. 11–16.

Поступила в редакцию 04.08.2014.

Борис Михайлович Дубров – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования.

Денис Иванович Пирштук – ассистент кафедры вычислительной математики.